3/04/19

• **Υπενθύμιση** Ορθογώνιοι πίνακες $A^{-1} = A^t$ ή $A^{-1} = A^{-t}$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ** Ένας ορθογώνιος πίνακας A απεικονίζει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση.

* **Απόδειξη:** $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ορθοκανονική βάση κ' $S' = \{Av_1, \dots, Av_n\}$ (επίσης)

Θέλω επίσης να είναι ορθοκανονική βάση. Πρέπει άρα:

$$<(Av_i)^t, (Av_j)^t> = \underbrace{<v_i^t, v_j^t>}_{\text{ορθοκανονική}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Ισομετρίες:

$T: V^n \to W^n$ γραμμική απεικόνιση επί ισομετρία $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow <T(v), T(v')>' = <v, v'>$

Θεωρώ ότι ο V έχει $<\_,\_>$ εσωτ. γινόμενο κ' ο W έχει $<\_,\_>'$. Κάθε ισομετρία είναι 1-1, κ' επειδή είναι κ' επί, αυσιαστικά δίνει έναν ισομορφισμό ο οποίος διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο πίνακας μιας ισομετρίας $T: V^n \to W^n$ ως προς ορθοκανονικές βάσεις είναι ορθογώνιος κ' αντίστροφα.

*** Απόδειξη:** Έστω $S=\{v_1, \dots, v_n\}$ ορθοκανονική βάση του V
κ' $S'=\{w_1, \dots, w_n\}$ — '' — '' — W

$T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{ni} w_n \quad i=1,\dots,n$

Άρα ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις θα είναι ο:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Θέλω νδο ο A είναι ορθογώνιος. Αρκεί νδο οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

$$<(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})> \overset{\mathbb{R}^n}{=}$$
$$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} \quad (1)$$

$$<(a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{ni} w_n), (a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{nj} w_n)>$$
$$= <a_{1i} w_1, a_{1j} w_1> + <a_{2i} w_2, a_{1j} w_1> + \dots + <a_{ni} w_n, a_{1j} w_1>$$
$$+ <a_{1i} w_1, a_{2j} w_2> + \dots + <a_{ni} w_n, a_{2j} w_2> + \dots +$$
$$+ <a_{1i} w_1, a_{nj} w_n> + \dots + <a_{ni} w_n, a_{nj} w_n> \quad (2)$$

S' ορθοκανονική βάση.

$$(2) \Rightarrow a_{1i}a_{1j}\overset{1}{<w_1, w_1>} + a_{2i}a_{1j}\overset{0}{<w_2, w_1>} + \dots +$$
$$+ a_{ni}a_{1j}\overset{0}{<w_n, w_1>} + \dots + a_{1i}a_{nj}\overset{0}{<w_1, w_n>} + a_{2i}a_{nj}\overset{0}{<w_2, w_n>}$$
$$+ \dots + a_{ni}a_{nj}\overset{1}{<w_n, w_n>} =$$
$$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow \; = <T(v_i), T(v_j)> \overset{\text{ισομ.}}{=} <v_i, v_j> = <v_i, v_j> = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$
s' ορθοκαν.

Έδειξα ότι οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση, άρα ο A είναι ορθογώνιος.

Αντίστροφα: A ορθογώνιος πίνακας κ' S, S' ορθοκανονικές βάσεις. Με τη βοήθεια του A θα ορίσω ισομετρία.

Ορίζω την $T: V \to W$ με τύπο:

$T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{ni} w_n \quad (3) \quad i=1,\dots,n$

Η T πρέπει να ορισθεί σε ένα τυχαίο $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

Ορίζω $T(u) = \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_n T(v_n)$
Μέχρι εδώ όρισα την γραμμική απεικόνιση T. ΝΔΟ είναι ισομετρία, ΔΔΣ:
$\langle T(u), T(u') \rangle = \langle u, u' \rangle$. Αρκεί να εξετάσω τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης $\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$
$T(v_i) = a_{1i} w_1 + \dots + a_{ni} w_n$ (u)
$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle (a_{1i} w_1 + \dots), (a_{1j} w_1 + \dots + a_{nj} w_n) \rangle =$
$\dots = a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots + a_{ni} a_{nj} \overset{\text{άρα}}{=} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \langle v_i, v_j \rangle$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Δύο ισοδιάστατοι ευκλείδιοι χώροι: $(V^n, \langle \_, \_ \rangle)$ κ' $(W^n, \langle \_, \_ \rangle')$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι

* **Απόδειξη:** Θα κατασκευάσω μια γραμμική απεικόνιση $T: V^n \to W^n$ η οποία θα είναι ισομετρία.
Έστω $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ κ' $S' = \{w_1, \dots, w_n\}$ 2 ορθοκανονικές βάσεις των V κ' W αντίστοιχα.
Ορίζω την $T: V \to W$ ως εξής:
$T(\underbrace{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_v v_v}_{\text{τυχαίο}}) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n$
εξ ορισμού η T είναι γραμμική κ' $T(v_i) = w_i$ (1)
ΝΔΟ είναι ισομετρία: $\langle T(v), T(v') \rangle' = \langle v, v' \rangle$ $\forall v, v' \in V$
Αρκεί να το εξετάσω στα στοιχεία της βάσης:
$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle' = \langle v_i, v_j \rangle$
$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle' \overset{(1)}{=} \langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} = \langle v_i, v_j \rangle$
Άρα η T είναι ισομετρία

Άσκ 2/φυλ 5 17x: Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο κ' το $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' = 4x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 8x_3 y_3$
ΝΔΟ η απεικόνιση $T: (\mathbb{R}^3, \langle \_, \_ \rangle) \to (\mathbb{R}^3, \langle \_, \_ \rangle')$ είναι ισομετρία με τύπο $T(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}} \right)$

! Πρώτα δείχνω ότι αυτό που δίνεται αποτελεί εσωτερικό γινόμενο. $\langle \_ , \_ \rangle' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ικανοποιούνται οι 4 ιδιότητες:

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3 =$

$= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Άρα ισχύουν οι 3 πρώτες ιδιότητες

$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \geq 0$

1ος τρόπος με ορισμό: $\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle'$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle \overset{\text{κανον.}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$\langle T(x_1, x_2, x_3), T(y_1, y_2, y_3) \rangle' = \langle \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_3}{2\sqrt{2}}\right) \rangle' =$

$= 4\frac{x_1}{2}\frac{y_1}{2} + 2\frac{x_2}{\sqrt{2}}\frac{y_2}{\sqrt{2}} + 8\frac{x_3}{2\sqrt{2}}\frac{y_3}{2\sqrt{2}} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

2ος τρόπος: θα πρέπει η εικόνα της ορθοκανονικής βάσης να είναι ορθοκανονική βάση

$T(1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

$T(0,1,0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$T(0,0,1) = \left(0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Πρέπει να εξετάσω ότι τα προηγούμενα διανύσματα αποτελούν ορθοκανονική βάση με το εσωτερικό γινόμενο.

$\langle \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \rangle' = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\langle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rangle' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$\langle \left(0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \rangle' = 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$

Βλέπω ότι $\langle \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rangle' = 0$ & το ίδιο για τα άλλα.

3ος τρόπος: $M(3\times 3, \mathbb{R})$ $O(n) \subseteq GL(2, \mathbb{R}) = \{$αντιστρέψιμοι πίνακες$\}$

Να εξεταστεί αν ο πίνακας της T ως προς τις ορθοκανονικές βάσεις είναι ορθογώνιος

$(1,0,0) \to \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = w_1$ $(0,0,1) = \left(0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = w_3$

$(0,1,0) \to \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = w_2$

$T(1,0,0) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ορθογώνιος

$w_1 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$

αα 3/φυλ 5 **πχ 2)** Να ορισθεί [illegible] του $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο κ' του $P_2[x]$ με το $\langle f,g\rangle' = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$P_2[x] = \langle \underset{u_1}{1}, \underset{u_2}{x}, \underset{u_3}{x^2} \rangle$ δεν είναι ορθοκανονική

Πρέπει να βρω ορθοκανονική βάση του $P_2[x]$.

$v_1 = u_1 = 1$

$v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle'}{\langle v_1, v_1\rangle'} v_1 = x - \dfrac{\int_0^1 x \cdot 1\,dx}{\int_0^1 1\,dx} \cdot 1 = x - \dfrac{1}{2}$

$v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_2\rangle'}{\langle v_2, v_2\rangle'} \cdot v_2 - \dfrac{\langle u_3, v_1\rangle'}{\langle v_1, v_1\rangle'} \cdot v_1 =$

$= x^2 - \dfrac{\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})\,dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx} - \dfrac{\int_0^1 x^2\,dx}{1} \cdot 1 = (1) \ldots$

- $\int_0^1 \left(x^3 - \dfrac{x^2}{2}\right)dx = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$ (2)

- $\int_0^1 \left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right)dx = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$ (3)

$(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} x^2 - \dfrac{1/12}{1/12}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{3} = x^2 - x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} =$

$= x^2 - x + \dfrac{1}{6}$

$\|v_1\|^2 = 1, \quad \|v_2\|^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \|v_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right)^2 dx =$

$= \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + \dfrac{1}{36} - 2x^3 + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{3}\right)dx = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{61}{180}$

$P_2[x] = \langle 1, \sqrt{12}\left(x - \dfrac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right) \rangle$

$T(a,b,c) = \cancel{T(a,0,0)} + T(0,b,0) + T(0,0,c) =$

$T: \mathbb{R}^3 \to P_2[x]$

$T(1,0,0) = 1$ $\quad T(0,1,0) = \sqrt{12}(x-\frac{1}{2})$ $\quad$ ~~$T(0,0,1) = \sqrt{180}(x$~~

$T(0,0,1) = \sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

$T(\alpha,\beta,\gamma) = T(\alpha,0,0) + T(0,\beta,0) + T(0,0,\gamma) =$

$= \alpha T(1,0,0) + \beta T(0,1,0) + \gamma T(0,0,1) =$

$= \alpha + \beta\sqrt{12}(x-\frac{1}{2}) + \gamma\sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

Πχ 3) Να ορισθεί ισομετρία μεταξύ ~~του~~ $P_2[x]$ με το $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ κ του $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό.

$T': P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad T'(1) = (1,0,0)$ $\quad T'(\sqrt{12}(x-\frac{1}{2})) = (0,1,0)$

$T'(\sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})) = (0,0,1)$ $\quad T'(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$

$\alpha+\beta x+\gamma x^2 = \kappa \cdot 1 + \lambda\sqrt{12}(x-\frac{1}{2}) + \mu\sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

Βρίσκω κ,λ,μ ως προς α,β,γ

$\alpha = \kappa - \lambda\sqrt{3} + \mu\sqrt{5}$ $\quad \beta = \lambda\sqrt{12} - \mu\sqrt{180}$ $\quad \gamma = \mu\sqrt{180}$

Άρα $\lambda = \frac{\beta+\gamma}{\sqrt{12}}$, $\alpha = \kappa - \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\gamma}{6} \Rightarrow \kappa = \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2} - \frac{\gamma}{6}$

κ' $\mu = \frac{\gamma}{\sqrt{180}}$ $\quad$ Άρα $T'(\alpha+\beta x+\gamma x^2) = T'(\ldots\ldots) =$

$= \alpha T'(1) + \ldots \quad =$

Ορθογώνιοι πίνακες: • 1x1. $\det = \pm 1$

• 2x2: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \to$ στροφή κατά φ
Δεν έχει πραγμ. ιδιοτιμές

$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \to$ συμμετρία προς $V(1)$. Ιδιοτιμές ±1

• 3x3: Ειδική περίπτωση:

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = A^t$
$\deg(\chi_A(\lambda)) = 3$

ΘΕΩΡΗΜΑ EULER: Κάθε 3×3 ορθογώνιος πίνακας με θετική ορίζουσα έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή ίση με 1, & παριστά μια στροφή ως προς επίπεδο που είναι $\perp$ σε ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1.

***Απόδειξη**: $A^{-1}=A^{t}$ $\quad A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ $\quad \det A=1$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

$\deg(\chi_A(\lambda))=3 \Rightarrow$ μία τουλάχιστον ιδιοτιμή είναι πραγμ.

$\lambda_1\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1=\pm1$. $\quad$ Αν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=\pm1$

Έστω $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.
$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A=1$ $\Big\} \Rightarrow$ τουλάχιστον μία είναι 1

$\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{C}-\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_3=\bar{\lambda}_2 \qquad \lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_2=1 \Rightarrow \lambda_1\cdot1=1$.

Αν η $\lambda_1=1$ έχει πολλαπλότητα 1, τότε $\dim V(1)=1$.

Άρα υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα u_1 ώστε $Au_1=u_1$ & $V(1)=\langle u_1\rangle$ ευθεία. Ξεκινώντας από το u_1 με μήκος 1 επεκτείνω σε ορθοκανονική βάση $(\{u_1,u_2,u_3\})$

Με P συμβολίζω τον ορθογώνιο πίνακα ο οποίος έχει στήλες u_1,u_2,u_3 & $\det P=1$ ή
$\{u_1,u_2,u_3\}$ αν έχει $\det=-1$

$P^{-1}AP=P^{t}AP$ ορθογώνιος & έχει ιδιοτιμή το 1 & ιδιοδιάνυσμα το $(1,0,0)$

$$\boxed{P^{t}AP}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

ορθογώνιος. B 2×2 ορθογώνιος με $\det=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$P^{t}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}P^{t}$$

Πχ. Να βρεθεί ο άξονας και η γωνία στροφής του πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζω Θ. Euler : $A^t = A^{-1}$ ΝΑΙ ορθογώνιος.

$$\det A = (-1)\det\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 \overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = 1.$$

$$\begin{pmatrix} -1/2-1 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -2y=0 \Rightarrow y=0 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \sqrt{3}x \end{array}$$

$$(x, 0, \sqrt{3}x) = x(1, 0, \sqrt{3})$$

$$V(1) = \langle (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \rangle \qquad (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \to \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = P$$

$$\det P = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} > 0$$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = \dots$$